

# МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Горно-Алтайский государственный университет»  
(ФГБОУ ВО ГАГУ, ГАГУ, Горно-Алтайский государственный университет)

## Практикум по решению математических задач повышенной сложности рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой **кафедра математики, физики и информатики**

Учебный план 44.04.01\_2023\_683М.plx  
44.04.01 Педагогическое образование  
Математическое образование

Форма обучения **очная**

Общая трудоемкость **2 ЗЕТ**

Часов по учебному плану 72  
в том числе:  
аудиторные занятия 54  
самостоятельная работа 8,1  
часов на контроль 8,85

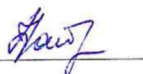
Виды контроля в семестрах:  
зачеты с оценкой 3

### Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	3 (2.1)		Итого	
	Неделя		Итого	
Вид занятий	УП	РП	УП	РП
Лекции	18	18	18	18
Практические	36	36	36	36
Консультации (для студента)	0,9	0,9	0,9	0,9
Контроль самостоятельной работы при проведении аттестации	0,15	0,15	0,15	0,15
Итого ауд.	54	54	54	54
Контактная работа	55,05	55,05	55,05	55,05
Сам. работа	8,1	8,1	8,1	8,1
Часы на контроль	8,85	8,85	8,85	8,85
Итого	72	72	72	72

Программу составил(и):

к.ф.-м.н., доцент, Байгонакова Г. А.



Рабочая программа дисциплины

**Практикум по решению математических задач повышенной сложности**

разработана в соответствии с ФГОС:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - магистратура по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование (приказ Минобрнауки России от 22.02.2018 г. № 126)

составлена на основании учебного плана:

44.04.01 Педагогическое образование

утвержденного учёным советом вуза от 26.12.2022 протокол № 12.

Рабочая программа утверждена на заседании кафедры  
**кафедра математики, физики и информатики**

Протокол от 09.03.2023 протокол № 8

И.о. зав. кафедрой Богданова Рада Александровна



---

---

**Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году**

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2024-2025 учебном году на заседании кафедры **кафедра математики, физики и информатики**

Протокол от \_\_\_\_\_ 2024 г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой и.о. Богданова Рада Александровна

---

---

**Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году**

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2025-2026 учебном году на заседании кафедры **кафедра математики, физики и информатики**

Протокол от \_\_\_\_\_ 2025 г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой и.о. Богданова Рада Александровна

---

---

**Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году**

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2026-2027 учебном году на заседании кафедры **кафедра математики, физики и информатики**

Протокол от \_\_\_\_\_ 2026 г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой и.о. Богданова Рада Александровна

---

---

**Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году**

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2027-2028 учебном году на заседании кафедры **кафедра математики, физики и информатики**

Протокол от \_\_\_\_\_ 2027 г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой и.о. Богданова Рада Александровна

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1	<i>Цели:</i> формирование у магистрантов профессиональных компетенции в процессе решения математических задач повышенного и высокого уровней сложности.
1.2	<i>Задачи:</i> 1.Формирование и развитие способностей магистрантов идентифицировать и решать предметные задачи исследовательского типа на основе имеющихся знаний, в том числе различными способами в рамках этого курса. 2.Формирование способности магистрантов решать задачи исследовательского типа межпредметной, практической, личностной или социальной направленности, в том числе на основе составления математической модели. 3.Формирование способности и готовности магистрантов исследовать индивидуальные особенности отношения учащихся к школьному курсу математики как предмету обучения. 4.Формирование умений магистрантов экспериментально проверять эффективность разработанной методики, делать обоснованные выводы, оформлять, представлять и обосновывать результаты своего профессионального исследования.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП	
Цикл (раздел) ООП:	Б1.В.ДВ.02
2.1	<b>Требования к предварительной подготовке обучающегося:</b>
2.1.1	Алгебра и методика ее преподавания
2.1.2	Дополнительные главы математического анализа
2.1.3	Избранные главы геометрии
2.2	<b>Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:</b>
2.2.1	Выполнение и защита выпускной квалификационной работы

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
<b>ПК-1: Способен самостоятельно проводить научные исследования в предметной области и методике обучения</b>	
<b>ИД-1.ПК-1: Обладает специальными научными знаниями в предметной области и методике обучения</b>	
Знает и владеет специальными научными знаниями решения задач математики и методике их обучения.	
<b>ИД-2.ПК-1: Умеет применять современные методики математических исследований в образовательном процессе</b>	
Умеет применять современные методики математических исследований при решении задач математики.	

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)							
Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетенции	Литература	Инте ракт.	Примечание
	<b>Раздел 1. 1. Введение. Основы исследовательской деятельности.</b>						

1.1	Методология курса «Практикум по решению математических задач повышенной сложности». Исследовательские задачи в школьном курсе математики. Основы исследовательской деятельности школьника. Понятие исследовательских задач. Типы исследовательских задач. Методы и формы исследований. Проектная деятельность. Результаты проектной деятельности школьника. Олимпиадные задачи. Исследовательская деятельность учителя математики. /Лек/	3	2	ИД-1.ПК-1 ИД-2.ПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	Вопросы к зачету
1.2	Олимпиадные задачи. Задачи повышенного уровня сложности в проектной деятельности обучающихся. /Пр/	3	8	ИД-1.ПК-1 ИД-2.ПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	Вопросы к зачету. Индивидуальные задания 1.

1.3	Исследовательская деятельность учителя математики. /Ср/	3	2	ИД-1.ПК-1 ИД-2.ПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	Вопросы к зачету.
<b>Раздел 2. 2. Задачи повышенного уровня сложности по теории чисел и алгебре</b>							
2.1	Методы решения исследовательских задач теории чисел. Методы решения исследовательских задач алгебры.  /Лек/	3	6	ИД-1.ПК-1 ИД-2.ПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	Вопросы к зачету. Контрольная работа 1.
2.2	Методы решения исследовательских задач теории чисел. Методы решения исследовательских задач алгебры. /Пр/	3	12	ИД-1.ПК-1 ИД-2.ПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	Вопросы к зачету. Контрольная работа 1.
2.3	Составить комплект исследовательских задач по теории чисел /Ср/	3	2	ИД-1.ПК-1 ИД-2.ПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	Вопросы к зачету. Контрольная работа 1.
<b>Раздел 3. 3. Методы решения уравнений и неравенств с модулями. Методы решения задач, содержащих параметры.</b>							
3.1	Методы решения уравнений и неравенств с модулями. Методы решения задач, содержащих параметры.  /Лек/	3	6	ИД-1.ПК-1 ИД-2.ПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	Вопросы к зачету. Индивидуальные задания 2.
3.2	Методы решения уравнений и неравенств с модулями. Методы решения задач, содержащих параметры.  /Пр/	3	12	ИД-1.ПК-1 ИД-2.ПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	Вопросы к зачету. Индивидуальные задания 2.
3.3	Составить комплект исследовательских задач, содержащих параметры. /Ср/	3	2,1	ИД-1.ПК-1 ИД-2.ПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	Вопросы к зачету. Индивидуальные задания 2.
<b>Раздел 4. 4. Геометрические задачи повышенного уровня сложности в математике.</b>							
4.1	Геометрические задачи на установление и уточнение связи между величинами; на выяснение свойств геометрических объектов. Геометрические задачи исследовательского характера по планиметрии в школьной математике.  /Лек/	3	4	ИД-1.ПК-1 ИД-2.ПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	Вопросы к зачету. Контрольная работа 2. Индивидуальные задания 3.

4.2	Геометрические задачи по стереометрии исследовательского характера в школьной математике.	3	4	ИД-1.ПК-1 ИД-2.ПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	Вопросы к зачету. Контрольная
4.3	Составление методического сопровождения к решению геометрических задач по стереометрии исследовательского характера в школьной математике. /Ср/	3	2	ИД-1.ПК-1 ИД-2.ПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	Вопросы к зачету. Контрольная работа 2. Индивидуальные задания 3.
<b>Раздел 5. Консультации</b>							
5.1	Консультация по дисциплине /Конс/	3	0,9	ИД-1.ПК-1 ИД-2.ПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	
<b>Раздел 6. Промежуточная аттестация (зачёт)</b>							
6.1	Подготовка к зачёту /ЗачётСОц/	3	8,85	ИД-1.ПК-1 ИД-2.ПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	
6.2	Контактная работа /КСРАтт/	3	0,15	ИД-1.ПК-1 ИД-2.ПК-1	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	

## 5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

### 5.1. Пояснительная записка

1. Назначение фонда оценочных средств. Оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины «Практикум по решению математических задач повышенной сложности».
2. Фонд оценочных средств включает контрольные материалы для проведения текущего контроля в форме индивидуального задания, контрольных работ, а также для промежуточной аттестации в форме вопросов к зачету с оценкой.

### 5.2. Оценочные средства для текущего контроля

Индивидуальные задания (см. приложение 1).

Задание 1. Олимпиадные задачи

Задание 2. Методы решения уравнений и неравенств с модулями. Методы решения задач, содержащих параметры

Задание 3. Геометрические задачи повышенного уровня сложности в математике

Критерии оценки.

Отметка «отлично», 84-100%, повышенный уровень. Обучающийся обнаружил всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, усвоил основную литературу и знаком с дополнительной литературой, рекомендованной программой дисциплины, усвоил взаимосвязь основных понятий дисциплины в их значении для приобретаемой профессии.

Отметка «хорошо», 66-83%, пороговый уровень. Обучающийся обнаружил полное знание учебно-программного материала, успешно выполнил предусмотренные программой задания, усвоил основную литературу, рекомендованную программой дисциплины, показал систематический характер знаний по дисциплине и способен к их самостоятельному пополнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности.

Отметка «удовлетворительно», 50-65%, пороговый уровень. Обучающийся обнаружил знание основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по профессии, справился с выполнением заданий, предусмотренных программой, знаком с основной литературой, рекомендованной программой дисциплины, допускает неточности, обладает необходимыми знаниями для их устранения под руководством.

Отметка «неудовлетворительно», менее 50%, уровень не сформирован. Обучающийся не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, не умеет выделить главное и делать выводы.

Контрольные работы (см. приложение 1).

Контрольная работа № 1. Задачи повышенного уровня сложности по теории чисел и алгебре

Контрольная работа № 2. Геометрические задачи повышенного уровня сложности в математике

Критерии оценки контрольной работы.

Оценка «отлично» выставляется, если магистрант имеет глубокие знания учебного материала по теме контрольной работы, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий используемых в работе, смог ответить на все уточняющие и дополнительные вопросы. Магистрант демонстрирует знания теоретического и практического материала по теме практической работы, определяет взаимосвязи между показателями задачи, даёт правильный алгоритм решения, определяет междисциплинарные связи по условию задания.

Оценка «хорошо» выставляется, если магистрант показал знание учебного материала, усвоил основную литературу, смог ответить почти полно на все заданные дополнительные и уточняющие вопросы. магистрант демонстрирует знания теоретического и практического материала по теме контрольной работы, допуская незначительные неточности при решении задач, имея неполное понимание междисциплинарных связей при правильном выборе алгоритма решения задания.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если магистрант в целом освоил материал контрольной работы, ответил не на все уточняющие и дополнительные вопросы. Магистрант затрудняется с правильной оценкой предложенной задачи, даёт

неполный ответ, требующий наводящих вопросов преподавателя, выбор алгоритма решения задачи возможен при наводящих вопросах преподавателя.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется магистранту, если он имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала контрольной работы, который полностью не раскрыл содержание вопросов, не смог ответить на уточняющие и дополнительные вопросы и даёт неверную оценку ситуации, неправильно выбирает алгоритм действий.

### 5.3. Темы письменных работ (эссе, рефераты, курсовые работы и др.)

Письменные работы не предусмотрены.

### 5.4. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Вопросы к зачету

1. Методология курса «Практикум по решению математических задач повышенной сложности»
2. Основы исследовательской деятельности школьника.
3. Понятие исследовательских задач.
4. Типы исследовательских задач.
5. Методы и формы исследований математических задач.
6. Проектная деятельность в математике. Результаты проектной деятельности школьника.
7. Олимпиадные задачи, как средства и условия деятельности обучающихся.
8. Исследовательская деятельность учителя математики.
9. Методы решения задач повышенного уровня сложности по теории чисел. Методы решения задач повышенного уровня сложности по алгебре.
10. Методы решения уравнений и неравенств с модулями. Методы решения задач, содержащих параметры.
11. Геометрические задачи на установление и уточнение связи между величинами; на выяснение свойств геометрических объектов.
12. Геометрические задачи повышенного уровня сложности по планиметрии в школьной математике.
13. Геометрические задачи по стереометрии повышенного уровня сложности в школьной математике.

Критерии оценки зачета

Зачтено, 50-100%. Обучающийся обнаружил знание основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по профессии, справился с выполнением заданий, предусмотренных программой, знаком с основной литературой, рекомендованной программой дисциплины. Не зачтено, менее 50%, уровень не сформирован. Магистрант не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, не справился с выполнением, заданий не умеет выделить главное и делать выводы.

## 6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

### 6.1. Рекомендуемая литература

#### 6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Эл. адрес
Л1.1	Клименко К. Г., Козловский Е. А., Левицкая Г. В.	Методы решения некоторых задач избранных разделов высшей математики: практикум	Москва: Прометей, 2014	<a href="https://www.iprbookshop.ru/58151.html">https://www.iprbookshop.ru/58151.html</a>
Л1.2	Подходова Н. С., Стефанова Н. Л., Снегурова В. И.	Методика обучения математике: учебное пособие	Санкт-Петербург: РГПУ им. А.И. Герцена, 2020	<a href="https://e.lanbook.com/book/252377">https://e.lanbook.com/book/252377</a>

#### 6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Эл. адрес
Л2.1	Веретенников В. Н.	Сборник задач по математике. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие	Санкт-Петербург: Российский государственный гидрометеорологический университет, 2011	<a href="https://www.iprbookshop.ru/17964.html">https://www.iprbookshop.ru/17964.html</a>

### 6.3.1 Перечень программного обеспечения

6.3.1.1	Google Chrome
6.3.1.2	Internet Explorer/ Edge
6.3.1.3	MS Office

6.3.1.4	Moodle
6.3.1.5	SMART Notebook
6.3.1.6	Kaspersky Endpoint Security для бизнеса СТАНДАРТНЫЙ
6.3.1.7	MS WINDOWS
6.3.1.8	NVDA
6.3.1.9	Яндекс.Браузер
6.3.1.10	LibreOffice
6.3.1.11	MS Windows
<b>6.3.2 Перечень информационных справочных систем</b>	
6.3.2.1	Электронно-библиотечная система «Издательство Лань»
6.3.2.2	Электронно-библиотечная система IPRbooks
6.3.2.3	База данных «Электронная библиотека Горно-Алтайского государственного университета»
6.3.2.4	Межвузовская электронная библиотека

<b>7. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ</b>	
	метод проектов
	проблемная лекция
	круглый стол
	дискуссия

<b>8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)</b>		
Номер аудитории	Назначение	Основное оснащение
206 Б1	Кабинет методики преподавания математики. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Ученическая доска, интерактивная доска, экран, проектор, компьютер, посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся), рабочее место преподавателя
207 Б1	Лекционная аудитория. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Ученическая доска, проектор, экран, системный блок, посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся), рабочее место преподавателя
209 Б1	Компьютерный класс. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации. Помещение для	Рабочее место преподавателя. Посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся). Маркерная ученическая доска, экран, мультимедиапроектор, компьютеры с доступом в Интернет

<b>9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)</b>
<p>Методические указания по освоению дисциплин (модулей)</p> <p>Лекции, с одной стороны – это одна из основных форм учебных занятий в высших учебных заведениях, представляющая собой систематическое, последовательное устное изложение преподавателем определенного раздела конкретной науки или учебной дисциплины, с другой – это особая форма самостоятельной работы с учебным материалом. Лекция не заменяет собой книгу, она только подталкивает к ней, раскрывая тему, проблему, выделяя главное, существенное, на что следует обратить внимание, указывает пути, которым нужно следовать, добиваясь глубокого понимания поставленной проблемы, а не общей картины.</p> <p>Работа на лекции – это сложный процесс, который включает в себя такие элементы как слушание, осмысление и собственно конспектирование. Для того, чтобы лекция выполнила свое назначение, важно подготовиться к ней и ее записи</p>



еще до прихода преподавателя в аудиторию. Без этого дальнейшее восприятие лекции становится сложным. Лекция в университете рассчитана на подготовленную аудиторию. Преподаватель излагает любой вопрос, ориентируясь на те знания, которые должны быть у магистрантов, усвоивших материал всех предыдущих лекций. Важно научиться слушать преподавателя во время лекции, поддерживать непрерывное внимание к выступающему.

Однако, одного слушания недостаточно. Необходимо фиксировать, записывать тот поток информации, который сообщается во время лекции – научиться вести конспект лекции, где формулировались бы наиболее важные моменты, основные положения, излагаемые лектором. Для ведения конспекта лекции следует использовать тетрадь. Ведение конспекта на листочках не рекомендуется, поскольку они не так удобны в использовании и часто теряются. При оформлении конспекта лекции необходимо оставлять поля, где магистрант может записать свои собственные мысли, возникающие параллельно с мыслями, высказанными лектором, а также вопросы, которые могут возникнуть в процессе слушания, чтобы получить на них ответы при самостоятельной проработке материала лекции, при изучении рекомендованной литературы или непосредственно у преподавателя в конце лекции. Составляя конспект лекции, следует оставлять значительный интервал между строчками. Это связано с тем, что иногда возникает необходимость вписать в первоначальный текст лекции одну или несколько строчек, имеющих принципиальное значение и почерпнутых из других источников. Расстояние между строками необходимо также для подчеркивания слов или целых групп слов (такое подчеркивание вызывается необходимостью привлечь внимание к данному месту в тексте при повторном чтении). Обычно подчеркивают определения, выводы.

Также важно полностью без всяких изменений вносить в тетрадь схемы, таблицы, чертежи и т.п., если они предполагаются в лекции. Для того, чтобы совместить механическую запись с почти дословным фиксированием наиболее важных положений, можно использовать системы условных сокращений. В первую очередь сокращаются длинные слова и те, что повторяются в речи лектора чаще всего. При этом само сокращение должно быть по возможности кратким.

Семинарские (практические) занятия Самостоятельная работа магистрантов по подготовке к семинарскому (практическому) занятию должна начинаться с ознакомления с планом семинарского (практического) занятия, который включает в себя вопросы, выносимые на обсуждение, рекомендации по подготовке к семинару (практическому занятию), рекомендуемую литературу к теме. Изучение материала следует начать с просмотра конспектов лекций. Восстановив в памяти материал, студент приводит в систему основные положения темы, вопросы темы, выделяя в ней главное и новое, на что обращалось внимание в лекции. Затем следует внимательно прочитать соответствующую главу учебника.

Для более углубленного изучения вопросов рекомендуется конспектирование основной и дополнительной литературы. Читая рекомендованную литературу, не стоит пассивно принимать к сведению все написанное, следует анализировать текст, думать над ним, этому способствуют записи по ходу чтения, которые превращают чтение в процесс. Записи могут вестись в различной форме: развернутых и простых планов, выписок (тезисов), аннотаций и конспектов.

Подобрав, отработав материал и усвоив его, магистрант должен начать непосредственную подготовку своего выступления на семинарском (практическом) занятии для чего следует продумать, как ответить на каждый вопрос темы.

По каждому вопросу плана занятий необходимо подготовиться к устному сообщению (5-10 мин.), быть готовым принять участие в обсуждении и дополнении докладов и сообщений (до 5 мин.).

Выступление на семинарском (практическом) занятии должно удовлетворять следующим требованиям: в нем излагаются теоретические подходы к рассматриваемому вопросу, дается анализ принципов, законов, понятий и категорий; теоретические положения подкрепляются фактами, примерами, выступление должно быть аргументированным.

Самостоятельная работа обучающихся – это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Объем самостоятельной работы определяется учебным планом основной профессиональной образовательной программы (ОПОП), рабочей программой дисциплины (модуля).

Самостоятельная работа организуется и проводится с целью формирования компетенций, понимаемых как способность применять знания, умения и личностные качества для успешной практической деятельности, в том числе:

- формирования умений по поиску и использованию нормативной, правовой, справочной и специальной литературы, а также других источников информации;
- качественного освоения и систематизации полученных теоретических знаний, их углубления и расширения по применению на уровне межпредметных связей;
- формирования умения применять полученные знания на практике (в профессиональной деятельности) и закрепления практических умений обучающихся;
- развития познавательных способностей, формирования самостоятельности мышления обучающихся;
- совершенствования речевых способностей обучающихся;
- формирования необходимого уровня мотивации обучающихся к систематической работе для получения знаний, умений и владений в период учебного семестра, активности обучающихся, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования способностей к саморазвитию (самопознанию, самоопределению, самообразованию, самосовершенствованию, самореализации и саморегуляции);
- развития научно-исследовательских навыков;
- развития навыков межличностных отношений.

К самостоятельной работе по дисциплине (модулю) относятся: проработка теоретического материала дисциплины (модуля); подготовка к семинарским и практическим занятиям, в т.ч. подготовка к текущему контролю успеваемости обучающихся (текущая аттестация); подготовка к лабораторным работам; подготовка к промежуточной аттестации (зачётам, экзаменам).

Виды, формы и объемы самостоятельной работы обучающихся при изучении дисциплины (модуля) определяются:

- содержанием компетенций, формируемых дисциплиной (модулем);
- спецификой дисциплины (модуля), применяемыми образовательными технологиями;
- трудоемкостью СР, предусмотренной учебным планом;

- уровнем высшего образования (бакалавриат, специалитет, магистратура, аспирантура), на котором реализуется ОПОП;  
- степенью подготовленности обучающихся.

Курсовая работа является самостоятельным творческим письменным научным видом деятельности магистранта по разработке конкретной темы. Она отражает приобретенные студентом теоретические знания и практические навыки.

Курсовая работа выполняется магистрантом самостоятельно под руководством преподавателя.

Курсовая работа, наряду с экзаменами и зачетами, является одной из форм контроля (аттестации), позволяющей определить степень подготовленности будущего специалиста. Курсовые работы защищаются магистрантами по окончании изучения указанных дисциплин, определенных учебным планом.

Оформление работы должно соответствовать требованиям. Объем курсовой работы: 25–30 страниц. Список литературы и Приложения в объем работы не входят. Курсовая работа должна содержать: титульный лист, содержание, введение, основную часть, заключение, список литературы, приложение (при необходимости). Курсовая работа подлежит рецензированию руководителем курсовой работы. Рецензия является официальным документом и прилагается к курсовой работе.

Тематика курсовых работ разрабатывается в соответствии с учебным планом. Руководитель курсовой работы лишь помогает студенту определить основные направления работы, очертить её контуры, указывает те источники, на которые следует обратить главное внимание, разъясняет, где отыскать необходимые книги.

Составленный список источников научной информации, подлежащий изучению, следует показать руководителю курсовой работы.

Курсовая работа состоит из глав и параграфов. Вне зависимости от решаемых задач и выбранных подходов структура работы должна содержать: титульный лист, содержание, введение, основную часть; заключение; список литературы; приложение(я).

Во введении необходимо отразить: актуальность; объект; предмет; цель; задачи; методы исследования; структура работы.

Основную часть работы рекомендуется разделить на 2 главы, каждая из которых должна включать от двух до четырех параграфов.

Содержание глав и их структура зависит от темы и анализируемого материала.

Первая глава должна иметь обзорно–аналитический характер и, как правило, является теоретической.

Вторая глава по большей части раскрывает насколько это возможно предмет исследования. В ней приводятся практические данные по проблематике темы исследования.

Выводы оформляются в виде некоторого количества пронумерованных абзацев, что придает необходимую стройность изложению изученного материала. В них подводятся итог проведённой работы, непосредственно выводы, вытекающие из всей работы и соответствующие выявленным проблемам, поставленным во введении задачам работы; указывается, с какими трудностями пришлось столкнуться в ходе исследования.

## Оценочные материалы

## Контрольная работа № 1. Исследовательские задачи по теории чисел и алгебре

1. Докажите:

$$а) C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 = C_5^3 + C_5^4 + C_5^5;$$

$$б) m \cdot C_n^m = n \cdot C_{n-1}^{m-1};$$

$$в) C_{n+1}^{m+1} = C_n^m \cdot \frac{n+1}{m+1}.$$

2. Напишите разложение по формуле бинома Ньютона и упростите при необходимости:

$$а) (a+b)^4; \quad б) (a-b)^4; \quad в) (a+2b)^5; \quad г) (a-2b)^5;$$

$$д) (1+2x)^5; \quad е) \left(\frac{1}{2}a+b\right)^7; \quad ж) \left(a-\frac{2}{b}\right)^5; \quad з) \left(a-\frac{1}{a}\right)^5;$$

$$и) \left(x+\frac{1}{2}x\right)^8; \quad к) (1+\sqrt{2})^5; \quad л) (1-\sqrt{2})^5; \quad м) (a-\sqrt{6})^6;$$

$$н) (b+\sqrt{6})^6; \quad о) (\sqrt{6}+\sqrt{12})^4; \quad п) \frac{1}{27}(\sqrt{3}-\sqrt{15})^6;$$

$$ж) \left(a-\frac{2}{b}\right)^5; \quad з) \left(a-\frac{1}{a}\right)^5; \quad и) \left(x+\frac{1}{2}x\right)^8;$$

$$к) (1+\sqrt{2})^5; \quad л) (1-\sqrt{2})^5; \quad м) (a-\sqrt{6})^6;$$

3. Найдите:

а) шестой член разложения  $(1-2z)^{21}$ ;

б) шестой член разложения  $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{15}$ ;

в) пятый член разложения  $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{13}$ ;

г) пятый член разложения  $(\sqrt{z}+z)^{10}$ ;

д) два средних члена разложения  $(a^3-ab)^{23}$ ;

е) в разложении  $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^{18}$  член, не содержащий  $x$ ;

ж) в разложении  $\left(1+\frac{1}{z^3}\right)^{18}$  член, не содержащий  $z$ ;

з) в разложении  $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{12}$  коэффициент при  $a^8$ ;

и) в разложении  $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^{12}$  коэффициент при  $x^4$ ;

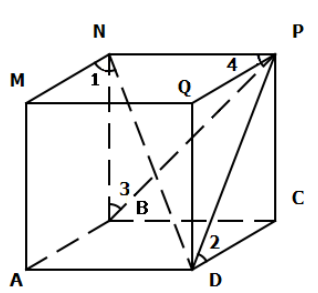
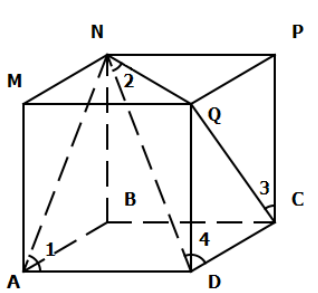
к)  $x$ , если третий член разложения  $(x+x^{lg x})^5$  равен  $10^6$ .

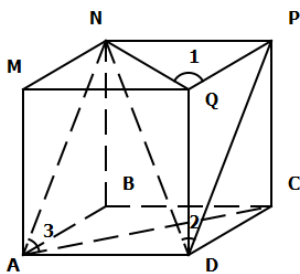
4. Доказать методом математической индукции:

- 1)  $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = \frac{(-1)^{n-1} \cdot n(n+1)}{2}$  ;
- 2)  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$  ;
- 3)  $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$  ;
- 4)  $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{2n+1}$  ;
- 5)  $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$  ;
- 6)  $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$  ;
- 7)  $-1 + 3 - 5 + 7 - \dots + (-1)^n (2n-1) = (-1)^n \cdot n$  ;
- 8)  $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$  ;
- 9)  $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$  ;
- 10)  $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$  .

5. На районном марафоне нам была предложена задача: Сколько четырехзначных нечетных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4?
6. Олимпиадная задача. Докажите, что число 13026970 делится на 55.
7. Докажите, что число 4356 можно представить в виде квадрата трех множителей.
8. Вычеркните в числе 181615121 три цифры так, чтобы полученное число делилось на 12. В ответе укажите какое-нибудь такое число.
9. Найдите шестизначное натуральное число, кратное 12, произведение цифр которого равно 40. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.
10. Приведите пример трехзначного натурального числа, которое при делении на 4 и на 15 дает равные ненулевые остатки, и первая справа, цифра которого является средним арифметическим двух других цифр.

Контрольная работа №2. Геометрические задачи исследовательского характера в математике

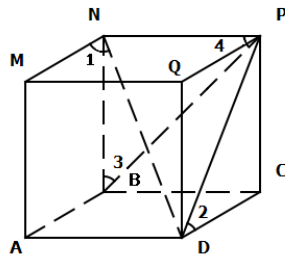
	
<p>ABCDMNPQ – куб. Укажите из отмеченных на рисунке углы между прямой и плоскостью. Докажите правильность своего выбора.</p>	<p>ABCDMNPQ - куб. Укажите из отмеченных на рисунке углы между прямой и плоскостью. Докажите правильность своего выбора.</p>



ABCDMNPQ - куб.

Докажите, что

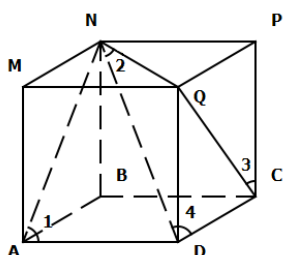
- а) угол 1 – это угол между прямой NQ и плоскостью (DQPC);
- б) угол 2 не является углом между прямой DP и плоскостью (BNQD);
- в) угол 3 не является углом между прямой AN и плоскостью (ABCD).



ABCDMNPQ - куб.

Докажите, что

- а) угол 1 не является углом между прямой DN и плоскостью (AMNB);
- б) угол 3 – это угол между прямой PB и плоскостью (AMNB);
- в) угол 4 не является углом между прямой BP и плоскостью (DQPC).

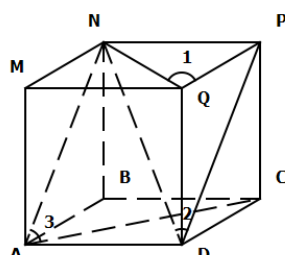


Найдите ошибку.

ABCDMNPQ - куб. На рисунке указаны:

- а) угол 1 – это угол между прямой AN и плоскостью (ABCD);
- б) угол 2 – это угол между прямой ND и плоскостью (MNPQ);
- в) угол 3 – это угол между прямой QC и плоскостью (BNPC);

Докажите.

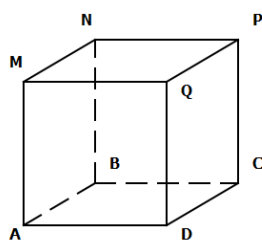


Найдите ошибку.

ABCDMNPQ - куб. На рисунке указаны:

- а) угол 1 – это угол между прямой NQ и плоскостью (DQPC);
- б) угол 2 – это угол между прямой DP и плоскостью (BNQD);
- в) угол 3 – это угол между прямой AC и плоскостью (AMNB).

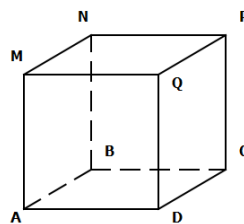
Докажите.



ABCDMNPQ - куб.

Постройте угол

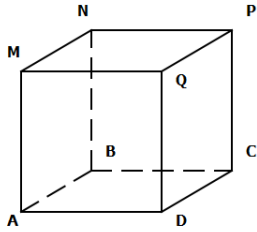
- а) между прямой DN и плоскостью (ABCD);
- б) между прямой DN и плоскостью (AMNB);
- в) между прямой DN и плоскостью (BNPC);
- г) между прямой DN и плоскостью (AMPC).



ABCDMNPQ - куб.

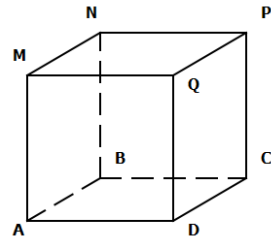
Постройте угол

- а) между прямой DN и плоскостью (MNPQ);
- б) между прямой DN и плоскостью (DQPC);
- в) между прямой DN и плоскостью (AMQD);
- г) между прямой DP и плоскостью (AMPC).



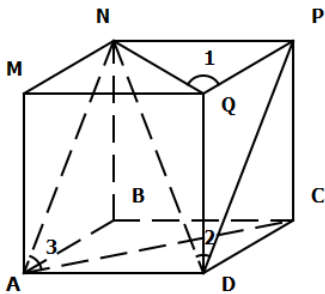
ABCDMNPQ - куб.

1. Чему равна величина угла между прямой DP и плоскостью (BNPC)?
2. Чему равен  $\text{ctg}$  угла между прямой ND и плоскостью (MNPQ)?
3. Чему равна величина угла между прямой NQ и плоскостью (DQPC)?
4. Чему равна величина угла между прямой DP и плоскостью (BNQD)?



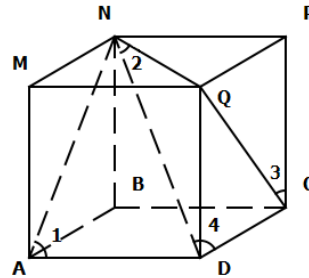
ABCDMNPQ - куб.

1. Чему равна величина угла между прямой NC и плоскостью (AMNB)?
2. Чему равен  $\text{tg}$  угла между прямой ND и плоскостью (DQPC)?
3. Чему равна величина угла между прямой DP и плоскостью (AMPC)?
4. Чему равен  $\text{tg}$  угла между прямой DP и плоскостью (BNQD)?



ABCDMNPQ - куб.

Укажите из отмеченных на рисунке углы между прямой и плоскостью. Докажите правильность своего выбора.



ABCDMNPQ - куб.

Укажите из отмеченных на рисунке углы между прямой и плоскостью. Докажите правильность своего выбора.

### Индивидуальные задания

#### Задание 1. Олимпиадные задачи по классам

##### 7 класс

- 7.1. Можно ли в таблице  $5 \times 5$  клеток расставить 25 чисел так, чтобы сумма четырех чисел в каждом квадрате  $2 \times 2$  была отрицательной, а сумма всех 25 чисел положительной?
- 7.2. Существует ли такое натуральное число  $n$ , что  $n + n^2 + n^3 + \dots + n^9 = (n + 1)^{10}$ ?
- 7.3. К некоторому двузначному числу слева и справа приписали по единице. В результате получили число в 23 раза больше первоначального. Найдите это двузначное число.
- 7.4. Из точки старта на велотреке круглой формы стартовали одновременно в одном направлении с постоянными, но разными скоростями два велосипедиста. Первый из них делает круг за 4 мин 40 с, второй – за 5,5 мин. Через некоторое время после старта первый велосипедист догнал второго, и они со скоростью второго велосипедиста доехали до точки старта вместе. Сколько минут они ехали вместе?

7.5. Попробуйте отыскать простой способ вычисления суммы

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 17} + \frac{1}{17 \cdot 19} + \frac{1}{19 \cdot 21}$$

и найдите её.

##### 8 класс

- 8.1. Восстановите цифры  $x, y, z$  в равенстве  $\overline{x5} \cdot \overline{3yz} = 7850$
- 8.2. Дана квадратная таблица  $3 \times 3$ , заполненная натуральными числами. За один ход разрешается к любым двум соседним числам прибавить одно и то же число. (Соседними считаются

числа, которые записаны в клетках, имеющих общую сторону.) Можно ли за несколько ходов получить: а) таблицу, во всех клетках которой записаны нули? Б) таблицу, в угловых клетках которой записаны единицы, а в остальных пяти клетках – нули?


**8.3.** Докажите, что при любом натуральном  $n$  число  $4^n + 5$  делится на 3.

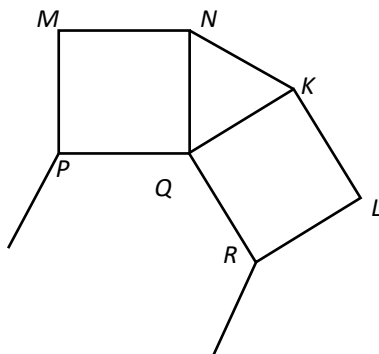
**8.4.** Медиана и высота треугольника, проведенные из одной вершины угла треугольника, делят этот угол на три равные части. Найти углы треугольника.

**8.5.** Некоторую работу могут выполнить трое рабочих. Вторым и третий могут вместе выполнить ее в три раза быстрее первого; первый и третий могут вместе выполнить ее в три раза быстрее второго. Во сколько раз первый и второй могут выполнить эту работу быстрее, чем третий?

### 9 класс

**9.1.** Найдите четырехзначное число, которое в 4 раза меньше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

**9.2.** На сторонах правильного  $n$ -угольника вне его построены квадраты. Известно, что  $2n$ -угольник, образованный вершинами этих квадратов, отличных от вершин  $n$ -угольника, является правильным. При каких значениях это возможно?



**9.3.** Существуют ли различные нечетные натуральные числа  $k$ ,  $l$  и  $m$ , такие, что выполняется равенство

$$\frac{1}{1991} = \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} ?$$

**9.4.** Диагонали  $AC$  и  $BD$  трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel CB$ ) взаимно перпендикулярны, длина средней линии трапеции равна  $m$ . На большем основании  $AD$  взята точка  $M$  так, что  $AM=m$ . Найдите длину отрезка  $MC$ .

**9.5.** Найти все решения уравнения  $x^2 - y^2 = 1996$  в целых числах.

### 10 класс

**10.1.** На стороне  $AC$  остроугольного треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ . Медиана  $AM$  пересекает высоту  $CH$  и отрезок  $BD$  в точках  $N$  и  $K$  соответственно. Докажите, что если  $AK = BK$ , то  $AN = 2KM$ .

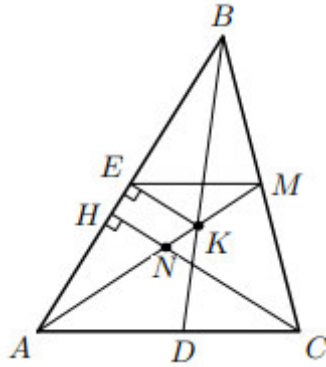


Рисунок 1

**10.2.** Имеется семь стаканов с водой: первый стакан заполнен водой наполовину, второй – на треть, третий – на четверть, четвертый – на одну пятую, пятый – на одну восьмую, шестой – на одну девятую, и седьмой – на одну десятую. Разрешается переливать всю воду из одного стакана в другой или переливать воду из одного стакана в другой до тех пор, пока он не заполнится доверху. Может ли после нескольких переливаний какой-нибудь стакан оказаться заполненным

- а) на одну двенадцатую; б) на одну шестую?

**10.3.** Уравнение  $x^2 + ax + b = 0$  имеет два различных действительных корня. Докажите, что уравнение  $x^4 + ax^3 + (b - 2)x^2 - ax + 1 = 0$  имеет четыре различных действительных корня.

**10.4.** Найдите все простые числа, которые являются одновременно суммой двух простых чисел и разностью двух простых чисел.

**10.5.** Дан четырехугольник ABCD, в котором  $AB = AD$  и  $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ . На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки F и E так, что  $DF \perp AE$ . Докажите, что  $AF \perp BE$ .

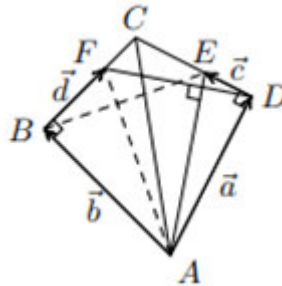


Рисунок 2

### 11 класс

**11.1.** Найдите все натуральные числа  $n$ , для которых сумма цифр числа  $5^n$  равна  $2^n$ .

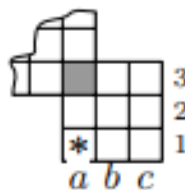


Рисунок 1

**11.2.** Точка O – основание высоты четырехугольной пирамиды. Сфера с центром O касается всех боковых граней пирамиды. Точки A, B, C, D взяты последовательно по одной на боковых ребрах пирамиды так, что отрезки AB, BC и CD проходят через три точки касания сферы с гранями. Докажите, что отрезок AD проходит через четвертую точку касания.



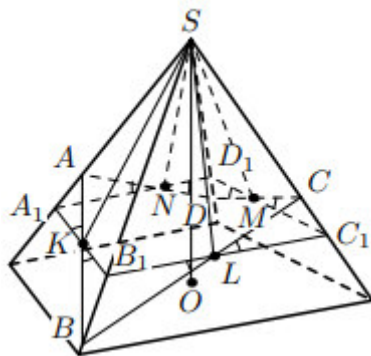


Рисунок 2

**11.3.** В прямоугольном параллелепипеде одно из сечений является правильным шестиугольником. Докажите, что этот параллелепипед – куб.

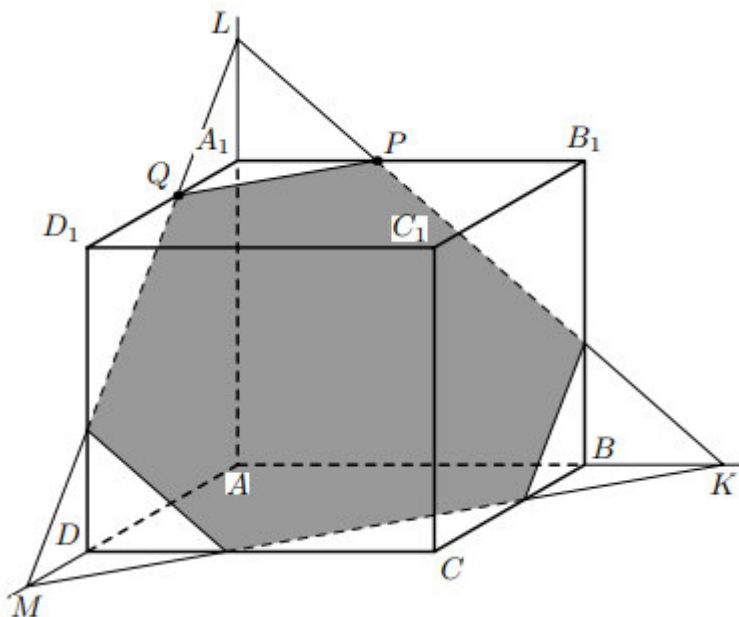


Рисунок 3

**11.4.** На столе лежали две колоды, по 36 карт в каждой. Первую колоду перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т.е. сколько карт между семерками червей, между дамами пик, и т.д.). Чему равна сумма 36 полученных чисел?

**11.5.** Существуют ли действительные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  такие, что при всех действительных  $x$  и  $y$  выполняется неравенство

$$|x + a| + |x + y + b| + |y + c| > |x| + |x + y| + |y|?$$

**Задание 2 . Методы решения уравнений и неравенств с модулями.  
Методы решения задач, содержащих параметры**

14. При каких значениях  $a$  система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2ay - a^2 + 1 \\ y + a \leq |x| \end{cases} \quad \text{имеет ровно два решения ?}$$

2. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых среди решений неравенства  $x + 4a > 5\sqrt{ax}$  нет ни одной точки отрезка  $[7;96]$ .

3. При каких значениях параметра  $n$  уравнение  $(n^2 - 4)x = n^3 - 2n^2 - n + 2$

- а) имеет единственный корень;
- б) имеет бесконечное множество корней;
- в) не имеет корней.

4. Решить уравнение  $\left| \frac{x^2 + 2x + 1}{x} \right| = \frac{x^2 + 2x + 1}{x}$ .

5. Решить уравнение  $|x^3 + x - 1| = |x^3 - x + 1|$ .

6. Решить уравнение  $|x^2 - 1| + |x^2 - 5x + 6| = 5x - 7$ .

7. Решить уравнение  $|81x^4 - 16| > 81x^4 - 16$ .

8. Решить уравнение  $|x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| = 9$ .

9. Чему равна сумма корней уравнения (корень, если он один) уравнения

$$\frac{|3x - 4| + x^2 - 12|x| + 36}{x - 5} = |x - 2|?$$

10. Решить уравнение  $\frac{|x^3 + x|}{|x + 1|} = \frac{2}{x + 1}$ .

11. Решить уравнение  $\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3$ .

12. Решить уравнение  $||x^3 + x + 1| - \sqrt{x}| = x^3 - x - \sqrt{x} - 1$ .

13. Решить неравенство  $||x^3 + x + 1| - \sqrt{x}| > x^3 - x - \sqrt{x} - 1$ .

14. Решить неравенство  $\frac{|x^2 - 3x + 2| - x^2 + 2x - 1}{|x| - |x - 1|} \leq 0$ .

### Задание 3. Геометрические задачи исследовательского характера в математике

1. В основании пирамиды лежит треугольник с внутренними углами  $\alpha$  и  $\beta$  и радиусом описанной окружности  $R$ . Все боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом  $\gamma$ . Найдите объём пирамиды.

Указание: Нужно обосновать:

а) построение изображения основания высоты пирамиды;

б) построение углов между боковыми рёбрами пирамиды и плоскостью её основания.

2. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны  $a$  и  $b$ , а его диагональ составляет с боковой гранью, содержащей сторону  $a$ , угол  $30^\circ$ . Найдите объём параллелепипеда.

Указание: Нужно обосновать построение угла между диагональю параллелепипеда и его боковой гранью.

3. Чему равен объём прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого длины  $a$  составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ , а с боковой гранью – угол  $\beta$  ?

Указание: Нужно обосновать:

а) построение угла между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания;

б) построение угла между диагональю и плоскостью боковой грани.

4. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 3 см и 5 см, а одна из диагоналей основания равна 4 см. Найдите длину большей диагонали параллелепипеда, зная, что меньшая образует с плоскостью основания угол  $60^\circ$ .

Указание. Установить, какая из диагоналей параллелепипеда является меньшей (использовать свойства наклонных к плоскости и их проекций на эту плоскость). Обосновать построение угла между меньшей диагональю и плоскостью нижнего основания параллелепипеда.

5. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб со стороной 4 см и углом  $60^\circ$ . Большая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания  $45^\circ$ . Найдите боковую поверхность параллелепипеда.

Указание. Установить, какая из диагоналей параллелепипеда является большей. Обосновать построение угла между этой диагональю и плоскостью нижнего основания.

6. дно ребро тетраэдра равно 4 см, а каждое из остальных 3 см. Найдите объём тетраэдра.

Указание. Обосновать построение изображения основания высоты пирамиды. В качестве основания тетраэдра можно брать равнобедренный треугольник (когда все боковые рёбра равны) или равносторонний треугольник; в первом случае обоснование чертежа является более простым.

7. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна  $3\sqrt{3}$  см, а её боковое ребро  $3\sqrt{5}$  см. Найдите величину двугранного угла при основании пирамиды.

Указание. Нужно обосновать:

- в какую точку плоскости основания проектируется вершина пирамиды;
- построение на чертеже линейного угла двугранного угла при основании пирамиды.

8. В треугольнике  $ABC$   $AC=BC=10$  см,  $\angle A=\angle B=30^\circ$ . Прямая  $BD$  перпендикулярна плоскости данного треугольника и  $BD=5$  см. Найдите расстояние от точки  $D$  до прямой  $AC$ .

Указание. Нужно обосновать построение изображения перпендикуляра из точки  $D$  на прямую  $AC$ . При этом следует учесть, что  $\angle ACB$  тупой, и потому основание этого перпендикуляра будет внешней точкой по отношению к отрезку  $AC$

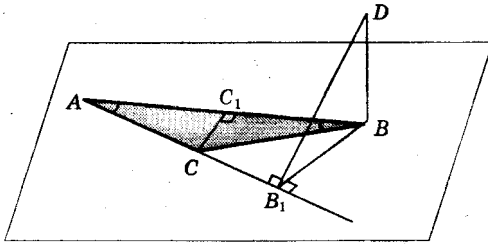


Рис. 15

9. Точка  $M$ , лежащая вне плоскости данного прямого угла, удалена от вершины угла на расстояние  $a$ , а от сторон на расстояние  $b$ . Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости угла.

Указание. Обосновать построение проекций точки  $M$  на плоскость, в которой лежит данный угол, и на его обе стороны.

10. В равнобедренном треугольнике основание и высота равны 4 см. Данная точка находится на расстоянии 6 см от плоскости треугольника и на равных расстояниях от его вершин. Найдите это расстояние.

Указание. Необходимо обосновать построение изображения основания перпендикуляра из данной точки на плоскость данного треугольника.

11. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны  $60^\circ$ . Найдите высоту пирамиды.

Указание. Нужно обосновать:

- построение точки, являющейся основанием высоты пирамиды;
- построение линейных углов двугранных углов при основании пирамиды.

12. Вычислите объём четырёхугольной пирамиды, в основании которой лежит равнобедренная трапеция с нижним основанием 2 см, боковой стороной 1 см и острым углом  $60^\circ$ , если известно, что все боковые рёбра пирамиды равны 2 см.

Указание. Обосновать построение изображения высоты (доказать при проведении обоснования чертежа, что основанием высоты пирамиды будет являться середина нижнего основания трапеции).

13. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $a$ . Вычислите площадь сечения этого куба плоскостью, проходящей через диагональ  $AB_1$  боковой грани и середину  $M$  ребра  $CD$ .

14. Найдите площадь сечения куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через вершину  $D$  и середины  $M$  и  $N$  рёбер  $A_1 B_1$  и  $B_1 C_1$ , если ребро куба равно 1.

15. Высота цилиндра 8 см, радиус основания 5 см. Цилиндр пересечён плоскостью так, что в сечении получается квадрат. Найдите расстояние от плоскости сечения до оси цилиндра.

Указание. Доказать, что в сечении цилиндра плоскостью может получиться квадрат лишь в том случае, когда секущая плоскость параллельна оси цилиндра, причём высота цилиндра не должна превышать диаметра основания. Обосновать построение отрезка, выражающего расстояние от прямой (оси цилиндра) до параллельной ей плоскости (секущей).

16. Образующая конуса равна 6 см и образует с его основанием угол  $45^\circ$ . Найдите площадь сечения конуса плоскостью, проведённой через две его образующие, угол между которыми равен  $60^\circ$ .

Указание. Необходимо обосновать:

- а) построение угла между образующей конуса и плоскостью его основания;  
б) существование сечения, проходящего через две образующие, угол между которыми равен  $60^\circ$  (найдутся ли среди множества образующих конуса две такие, угол между которыми  $60^\circ$ ?).

17. В трапеции ABCD известны боковые стороны  $AB = 7$ ;  $CD = 28$  и верхнее основание  $BC = 5$ . Известно, что  $\cos \angle BCD = \frac{2}{7}$ . Найдите AC.

18. Окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  пересекаются в точках A и B. Известно, что  $\angle AO_1B = 90^\circ$ ;  $\angle AO_2B = 60^\circ$ ;  $OO_1 = a$ . Найдите радиусы окружностей.

19. Точки  $A_1, B_1, C_1$  – основания высот треугольника ABC. Углы треугольника  $A_1B_1C_1$  равны  $90^\circ, 60^\circ$  и  $30^\circ$ . Найдите углы треугольника ABC.

20. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 2:3. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри трапеции.

21. Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

22. Прямая касается окружностей R и r в точках A и B. Известно, что расстояние между центрами равно a, причём  $r < R$  и  $r + R < a$ . Найдите AB.

23. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 12. Известно, что  $AB = 6$  и  $BC = 12$ . Найдите AC.

24. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что  $CH = AB$ . Найдите угол ACB.

25. Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен  $60^\circ$ . В треугольнике ABC вписана окружность с центром M. Найдите угол AMC.

26. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O – центр вписанной окружности. Известно, что  $BC = 24$ ;  $MN = 12$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

27. Через середину стороны AB квадрата ABCD проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образуя с прямой AB угол  $\alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 3$ . Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата ABCD равна 4.

28. Дан параллелограмм ABCD,  $AB = 2$ ,  $BC = 3$ ,  $\angle A = 60^\circ$ . Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершин одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника ABOD.

29. Дан параллелограмм ABCD  $AB = 3$ ,  $BC = 5$ ,  $\angle A = 60^\circ$ . Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника ABOD.

30. В прямоугольнике ABCD  $AB = 2$ ,  $BC = \sqrt{3}$ . Точка E на прямой AB выбрана так, что  $\angle AED = \angle DEC$ . Найдите AE.